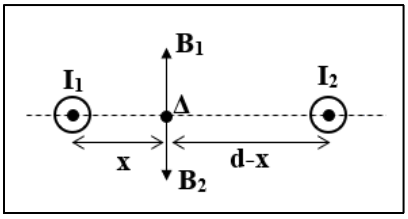
Θέμα Α

Α1 – β , Α2 – α , Α3 – γ , Α4 – α , Α5 α – Σ, β – Σ , γ – Λ , δ – Σ , ε – Λ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

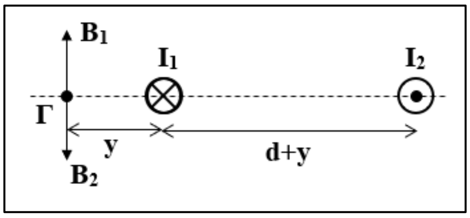
Έστω σημείο Δ που απέχει απόσταση x από τον αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_1 και ισχύει:



$$\vec{B}_{ολ(\Delta)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{0} \Rightarrow B_1 - B_2 = 0 \Rightarrow$$

$$k_\mu \frac{2I_1}{x} = k_\mu \frac{2I_2}{d-x} \Rightarrow \frac{I_1}{x} = \frac{3I_1}{d-x} \Rightarrow 3x = d - x \Rightarrow x = \frac{d}{4}$$

Έστω σημείο Γ που απέχει απόσταση y από τον αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_1 και ισχύει:



$$\vec{B}_{ολ(\Gamma)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_1' + \vec{B}_2' = \vec{0} \Rightarrow B_1' - B_2' = 0 \Rightarrow$$

$$k_\mu \frac{2I_1}{y} = k_\mu \frac{2I_2}{d+y} \Rightarrow \frac{I_1}{y} = \frac{3I_1}{d+y} \Rightarrow 3y = d + y \Rightarrow y = \frac{d}{2}$$

Άρα $(\Gamma\Delta) = x + y = \frac{d}{4} + \frac{d}{2} \Rightarrow (\Gamma\Delta) = \frac{3d}{4}$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Αρχή του Pascal: $\Delta p_{εμβόλου} = \Delta p_{τάπας} \Rightarrow \frac{w}{A_1} = \frac{\Delta F}{A_2} \Rightarrow \frac{w}{50A_2} = \frac{\Delta F}{A_2} \Rightarrow \Delta F = \frac{w}{50}$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η περίοδος του διακροτήματος είναι: $T_\delta = \frac{1}{|\Delta f|} \Rightarrow T_\delta = 0{,}5\,s$. Ανά περίοδο το πλάτος της σύνθετης - ιδιόμορφης ταλάντωσης μηδενίζεται μία φορά. Άρα σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 4s = 8T_\delta$ θα μηδενίζεται οκτώ φορές.

Θέμα Γ

Γ1. Από τις εξισώσεις απομάκρυνσης προκύπτουν $\varphi_{02} = \frac{\pi}{2} rad$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{3} rad$. Η διαφορά φάσης των επιμέρους ταλαντώσεων είναι $\Delta\varphi = \varphi_{02} = \frac{\pi}{2} rad$.

Ισχύει: $εφθ = εφφ_0 = \frac{A_2 \cdot ημ\Delta\varphi}{A_1 + A_2 \cdot συν\Delta\varphi} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow A_2 = \sqrt{3}A_1 = 0{,}4\sqrt{3}m$

Για το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης ισχύει:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\,συν\Delta\varphi} = \sqrt{A_1^2 + 3A_1^2 + 2A_1A_2 \cdot 0} \Rightarrow A = 2A_1 = 0{,}8m$$

Γ2. Η απομάκρυνση της πρώτης ταλάντωσης είναι $x_1 = +0{,}4m$ για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{4}$, όπου $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{25} s$ άρα $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{100} s$.

Η ταχύτητα της σύνθετης ταλάντωσης έχει εξίσωση: $\upsilon = \upsilon_{max} συν(\omega t + \varphi_0) = \omega \cdot A συν(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$

$$\upsilon = 50\cdot 0{,}8\sigma\upsilon\nu\left(50\frac{\pi}{100}+\frac{\pi}{3}\right) = 40\sigma\upsilon\nu\left(+\frac{5\pi}{6}\right) = 40\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon = -20\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

Γ3. Ισχύει ότι $x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \eta\mu\left(50t+\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\eta\mu\left(50t+\frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu 0 \Rightarrow \begin{cases} 50t+\frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi,\ \upsilon > 0 \\ 50t+\frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi+\pi,\ \upsilon < 0 \end{cases}$$

Πρώτη φορά $\upsilon < 0$ άρα $50t+\frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi+\pi \Rightarrow 50t = 2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\kappa\pi}{25}+\frac{2\pi}{150}$

$$\kappa = 0 \rightarrow t = \frac{2\pi}{150}s = \frac{\pi}{75}s$$

Γ4. Από τις εξισώσεις των απομακρύνσεων των επιμέρους ταλαντώσεων $x_1 = 0{,}4\eta\mu(50t)\ S.I.$ και $x_2 = 0{,}4\eta\mu(52t)\ S.I.$ έχουμε $A = 0{,}4m,\ \omega_1 = 50\frac{rad}{s},\ \omega_2 = 52\frac{rad}{s}$

Η εξίσωση της ιδιόμορφης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα είναι:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) = 2\cdot 0{,}4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{50-52}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{50+52}{2}t\right) \Rightarrow$$

$$x = 0{,}8\sigma\upsilon\nu(\pi t)\eta\mu(51\pi t)S.I.$$

Γ5. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{8}s$ θα υπολογιστεί από την αρχή της επαλληλίας $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$. Για τις επιμέρους εξισώσεις ταχύτητας ταλάντωσης έχουμε:

$$\upsilon_1 = \upsilon_{1max}\sigma\upsilon\nu(\omega_1 t) = \omega_1 A\sigma\upsilon\nu(\omega_1 t) \Rightarrow \upsilon_1 = 20\sigma\upsilon\nu(50t) = 20\sigma\upsilon\nu\left(50\frac{\pi}{8}\right) = 20\sigma\upsilon\nu\left(\frac{25\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = 20\sigma\upsilon\nu\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right) = 20\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right) = 20\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \upsilon_1 = 10\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_{2max}\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t) = \omega_2 A\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t) \Rightarrow \upsilon_2 = 20{,}8\sigma\upsilon\nu(52t) = 20{,}8\sigma\upsilon\nu\left(52\frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = 20{,}8\sigma\upsilon\nu\left(\frac{26\pi}{4}\right) = 20{,}8\sigma\upsilon\nu\left(6\pi+\frac{2\pi}{4}\right) = 20{,}8\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \upsilon_2 = 0$$

Άρα $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2 = 10\sqrt{2}\frac{m}{s} + 0 \Rightarrow \upsilon = 10\sqrt{2}\frac{m}{s}$

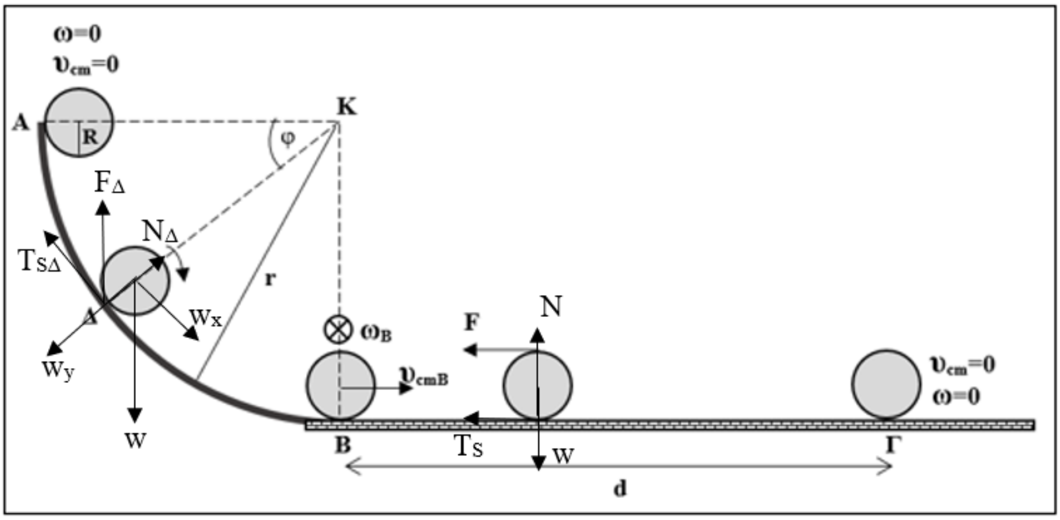
Θέμα Δ

Δ1. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου μόλις φτάνει στο οριζόντιο δάπεδο (θέση Β) θα υπολογιστεί εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ. Η στατική τριβή δεν παράγει έργο αφού δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση.

$$E_{\text{MHX(A)}} = E_{\text{MHX(B)}} \Rightarrow K_{o\lambda\text{A}} + U_{\text{A}} = K_{o\lambda\text{B}} + U_{\text{B}} \Rightarrow mgr = \frac{1}{2}m\upsilon_{\text{B}}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_{\text{B}}^2 + mgR \Rightarrow$$

$$mgr - mgR = \frac{1}{2}m\upsilon_{\text{B}}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega_{\text{B}}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{\text{B}}^2 + \frac{1}{4}m\upsilon_{\text{B}}^2 = mg(r-R) \Rightarrow \frac{3}{4}m\upsilon_{\text{B}}^2 = mg(r-R) \Rightarrow$$

$$\upsilon_{\text{B}} = \sqrt{\frac{4}{3}g(r-R)} \Rightarrow \upsilon_{\text{B}} = 4\frac{m}{s}$$



Δ2. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης υπολογίζεται:

$$W_F = W_F^{\mu\tau\varphi} + W_{\tau_F}^{\sigma\tau\rho\varphi} = -F\cdot d - \tau_F\cdot\theta = -F\cdot d - FR\cdot\theta = -F\cdot d - F\cdot d = -2F\cdot d \Rightarrow W_F = -24J$$

όπου λόγω της κύλισης χωρίς ολίσθηση ισχύει $x_{cm} = d = R\theta$

Δ3. Η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται:

$$P_F = P_F^{\mu\tau\varphi} + P_{\tau_F}^{\sigma\tau\rho\varphi} = -F\cdot\upsilon_{cm} - \tau_F\cdot\omega = -F\cdot\upsilon_{cm} - FR\cdot\omega = -F\cdot\upsilon_{cm} - F\cdot\upsilon_{cm} = -2F\cdot\upsilon_{cm} \Rightarrow P_F = -12W$$

Δ4. Ο λόγος των μέτρων των στροφορμών του δίσκου λόγω ιδιοπεριστροφής και λόγω της τροχιακής του κίνησης ως προς το κέντρο Κ του τεταρτοκυκλίου $\left(\dfrac{L_{spin}}{L_{\tau\rho o\chi\iota\alpha\kappa\acute{\eta}}}\right)$, κατά τη διάρκεια της κίνησής του στο τεταρτοκύκλιο είναι:

$$\frac{L_{spin}}{L_{\tau\rho o\chi\iota\alpha\kappa\acute{\eta}}} = \frac{I_{cm}\omega}{m\upsilon_{cm}(r-R)} = \frac{\frac{1}{2}mR^2\omega}{m\upsilon_{cm}(r-R)} = \frac{\frac{1}{2}mR^2\omega}{mR\omega(r-R)} = \frac{R}{2(r-R)} \Rightarrow \frac{L_{spin}}{L_{\tau\rho o\chi\iota\alpha\kappa\acute{\eta}}} = \frac{1}{12}$$

Δ5. Η δύναμη που δέχεται ο δίσκος από το τεταρτοκύκλιο θα υπολογιστεί από τη συνισταμένη των δυνάμεων της κάθετης δύναμης $\vec{N}_\Delta$ και της στατικής τριβής $\vec{T}_S$ που δέχεται από το τεταρτοκύκλιο.

Η κάθετη δύναμη $\vec{N}_\Delta$ θα βρεθεί από την κεντρομόλο δύναμη ως εξής:

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για την κίνηση στο τεταρτοκύκλιο αφού η στατική τριβή δεν παράγει έργο στην κύλιση χωρίς ολίσθηση καθώς στη διάρκεια της κίνησης δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της. ΑΔΜΕ $\mathrm{A}\to\Delta$: $E_{\mu\eta\chi(\mathrm{A})} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)} \Rightarrow K_{o\lambda(\mathrm{A})} + U_{\mathrm{A}} = K_{o\lambda(\Delta)} + U_\Delta \Rightarrow$

$$0+0+mgy = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm\Delta}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_\Delta^2 + 0 \Rightarrow mgy = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm\Delta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega_\Delta^2 \Rightarrow$$

$$mg(r-R)\eta\mu\varphi = \frac{3}{4}m\upsilon_{cm\Delta}^2 \Rightarrow m\upsilon_{cm\Delta}^2 = \frac{4}{3}mg(r-R)\eta\mu\varphi \ (1)$$

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau(\Delta)} = m\alpha_{\kappa(\Delta)} \Rightarrow N_\Delta - w_y = \frac{m\upsilon_{cm\Delta}^2}{r-R} \Rightarrow N_\Delta = w_y + \frac{m\upsilon_{cm\Delta}^2}{r-R} \xrightarrow{(1)}$$

$$N_\Delta = mg\eta\mu\varphi + \frac{4}{3}\frac{mg(r-R)\eta\mu\varphi}{r-R} \Rightarrow N_\Delta = \frac{7}{3}mg\eta\mu\varphi = \frac{70}{3}N$$

Η στατική τριβή $\vec{T}_S$ θα βρεθεί από τους θεμελιώδεις νόμους μεταφορικής και στροφικής.

ΘΝΜ: $\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow w_x - T_S = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\varphi - T_S = m\alpha_{cm}$ (2)

ΘΝΣ: $\Sigma\tau = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_S R = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow 2T_S = mR\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow 2T_S = m\alpha_{cm}$ (3)

$$(2)=(3) \Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\varphi - T_S = 2T_S \Rightarrow T_S = \frac{1}{3}mg\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{10\sqrt{3}}{3}N$$

Άρα $\vec{F}_\Delta = \vec{N}_\Delta + \vec{T}_S \to F_\Delta = \sqrt{N_\Delta^2 + T_S^2} \Rightarrow F_\Delta = \sqrt{\frac{5200}{9}}N = \frac{20}{3}\sqrt{13}N$

Δ6. Εφαρμόζοντας τους θεμελιώδεις νόμους έχουμε:

ΘΝΜ: $\Sigma F'_x = m\alpha'_{cm} \Rightarrow F' - T'_S = m\alpha'_{cm}$ (4)

ΘΝΣ: $\Sigma\tau' = I_{cm}\alpha'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F'R - T'_S R = \frac{1}{2}mR^2\alpha'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F' - T'_S = \frac{1}{2}m\alpha'_{cm} \Rightarrow 2F' - 2T'_S = m\alpha'_{cm}$ (5)

$$(4)=(5) \Rightarrow F' + T'_S = 2F' - 2T'_S \Rightarrow T'_S = \frac{F'}{3}$$

Ελάχιστη απόσταση θα διανύσει ο δίσκος όταν έχει τη μέγιστη δυνατή επιβράδυνση εκτελώντας πάντα κύλιση χωρίς ολίσθηση. Αυτό επιτυγχάνεται όταν του ασκείται κατά μέτρο η μέγιστη δύναμη.

Ισχύει $T'_S \le T'_{S\,max} \Rightarrow \frac{F'}{3} \le \mu_S N \Rightarrow \frac{F'}{3} \le \mu_S mg \Rightarrow F' \le 3\mu_S mg \to F'_{max} = 3\mu_S mg = 12N$

Εφαρμόζοντας του θεώρημα έργου ενέργειας έχουμε για την κίνηση του δίσκου στο οριζόντιο δάπεδο έχουμε:

$K_{o\lambda(\Gamma)} - K_{o\lambda(B)} = W_{F'} + W_{T'_S} \Rightarrow$ όπου $W_{T'_S} = 0$ όπως εξηγήθηκε στο ερώτημα Δ5

$$0 + 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_{cmB}^2 - \frac{1}{2}I_{cm}\omega_B^2 = W_{F'}^{\mu\tau\varphi} + W_{\tau_{F'}}^{\sigma\tau\rho\varphi} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m\upsilon_{cmB}^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega_B^2 = -F'\cdot d_{min} - \tau_{F'}\cdot\theta_{min} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m\upsilon_{cmB}^2 - \frac{1}{4}m\upsilon_{cmB}^2 = -F'\cdot d_{min} - F'R\cdot\theta_{min} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m\upsilon_{cmB}^2 - \frac{1}{4}m\upsilon_{cmB}^2 = -F'\cdot d_{min} - F'\cdot d_{min} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4}m\upsilon_{cmB}^2 = 2F'\cdot d_{min} \Rightarrow d_{min} = 1m$$